

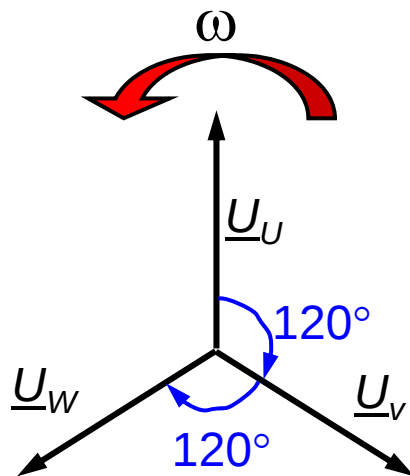
Vorlesung „Berechnung elektrischer Energienetze“ (BEE)

1. Das Drehstromsystem
2. Berechnung von Energieübertragungsnetzen und -systemen
3. Der 3-polige Kurzschluss
4. Unsymmetrische Fehler in Netzen
5. Hochspannungstechnik

Skript kann von der IEH Homepage geladen werden: <http://www.ieh.kit.edu>

Benutzername: **bee** Passwort: **4BEE2use!**

Mathematische Darstellung des Dreiphasensystems



$$\underline{U}_U = U_U \cdot e^{j(\omega t - 0^\circ)} = U_U \cdot e^{j\omega t}$$

$$\underline{U}_V = U_V \cdot e^{j(\omega t - 120^\circ)} = U_V \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$\underline{U}_W = U_W \cdot e^{j(\omega t - 240^\circ)} = U_W \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} = U_W \cdot e^{j\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)}$$

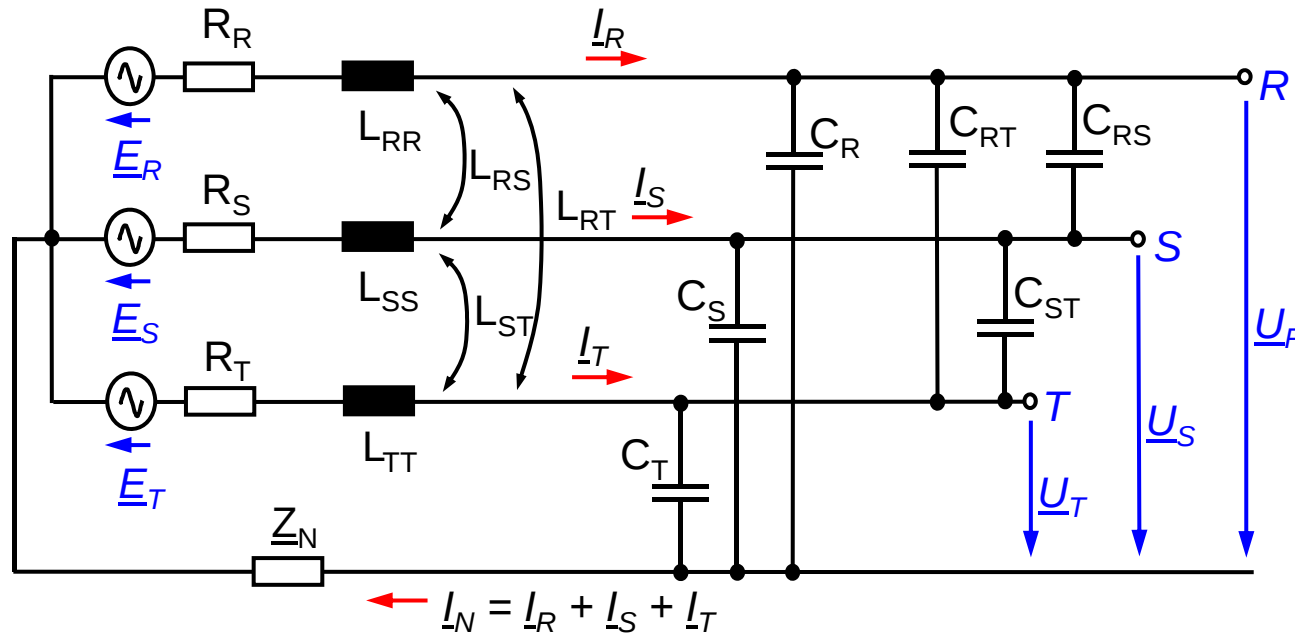
$e^{j \cdot \alpha}$

- Drehung gegen den Uhrzeigersinn für $\alpha > 0$
- Drehung in Richtung des Uhrzeigersinns für $\alpha < 0$.

Phasenfolge U, V und W ist in Richtung des Uhrzeigersystems orientiert

Ausgehend von $\underline{U}_U$ folgt um 120° versetzt $\underline{U}_V$ in Richtung des Uhrzeigersinns und wiederum um 120° versetzt zu $\underline{U}_V$ folgt $\underline{U}_W$.

Berechnung des Dreiphasensystems



Netzwerk:
elektrisch und magnetisch
gekoppelt

Verbraucher und C's
kann man sich zu
Admittanzen $\underline{Y}$
zusammengefasst
denken

Anwendung der Maschenregel und des Knotenpotenzialverfahrens

$$\underline{U}_R = \underline{E}_R - j\omega L_{RR} \cdot \underline{I}_R - j\omega L_{RS} \cdot \underline{I}_S - j\omega L_{RT} \cdot \underline{I}_T - R_R \cdot \underline{I}_R - \underline{Z}_N \cdot \underline{I}_N$$

$$\underline{U}_S = \underline{E}_S - j\omega L_{SR} \cdot \underline{I}_R - j\omega L_{SS} \cdot \underline{I}_S - j\omega L_{ST} \cdot \underline{I}_T - R_S \cdot \underline{I}_S - \underline{Z}_N \cdot \underline{I}_N$$

$$\underline{U}_T = \underline{E}_T - j\omega L_{TR} \cdot \underline{I}_R - j\omega L_{TS} \cdot \underline{I}_S - j\omega L_{TT} \cdot \underline{I}_T - R_T \cdot \underline{I}_T - \underline{Z}_N \cdot \underline{I}_N$$

und $\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T$

$$\underline{I}_R = (\underline{Y}_{RR} + \underline{Y}_{RS} + \underline{Y}_{RT}) \cdot \underline{U}_R - \underline{Y}_{RS} \cdot \underline{U}_S - \underline{Y}_{RT} \cdot \underline{U}_T$$

$$\underline{I}_S = -\underline{Y}_{SR} \cdot \underline{U}_R + (\underline{Y}_{SS} + \underline{Y}_{SR} + \underline{Y}_{ST}) \cdot \underline{U}_S - \underline{Y}_{ST} \cdot \underline{U}_T$$

$$\underline{I}_T = -\underline{Y}_{TR} \cdot \underline{U}_R - \underline{Y}_{TS} \cdot \underline{U}_S - (\underline{Y}_{TT} + \underline{Y}_{TS} + \underline{Y}_{TR}) \cdot \underline{U}_T$$

Allgemeines Dreiphasensystem

$$\underline{U}_R = \underline{E}_R - j\omega L_{RR} \cdot \underline{I}_R - j\omega L_{RS} \cdot \underline{I}_S - j\omega L_{RT} \cdot \underline{I}_T - R_R \cdot \underline{I}_R - \underline{Z}_N \cdot \underline{I}_N$$

$$\underline{U}_S = \underline{E}_S - j\omega L_{SR} \cdot \underline{I}_R - j\omega L_{SS} \cdot \underline{I}_S - j\omega L_{ST} \cdot \underline{I}_T - R_S \cdot \underline{I}_S - \underline{Z}_N \cdot \underline{I}_N$$

$$\underline{U}_T = \underline{E}_T - j\omega L_{TR} \cdot \underline{I}_R - j\omega L_{TS} \cdot \underline{I}_S - j\omega L_{TT} \cdot \underline{I}_T - R_T \cdot \underline{I}_T - \underline{Z}_N \cdot \underline{I}_N$$

und $\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T$

$$\underline{I}_R = (\underline{Y}_{RR} + \underline{Y}_{RS} + \underline{Y}_{RT}) \cdot \underline{U}_R - \underline{Y}_{RS} \cdot \underline{U}_S - \underline{Y}_{RT} \cdot \underline{U}_T$$

$$\underline{I}_S = -\underline{Y}_{SR} \cdot \underline{U}_R + (\underline{Y}_{SS} + \underline{Y}_{SR} + \underline{Y}_{ST}) \cdot \underline{U}_S - \underline{Y}_{ST} \cdot \underline{U}_T$$

$$\underline{I}_T = -\underline{Y}_{TR} \cdot \underline{U}_R - \underline{Y}_{TS} \cdot \underline{U}_S - (\underline{Y}_{TT} + \underline{Y}_{TS} + \underline{Y}_{TR}) \cdot \underline{U}_T$$

In der Praxis: Symmetrie

$$L = L_{RR} = L_{SS} = L_{TT}$$

$$R = R_R = R_S = R_T$$

$$M = L_{RS} = L_{SR} = L_{RT} = L_{TR} = L_{ST} = L_{TS}$$

$$\underline{Y}_E = \underline{Y}_{RR} = \underline{Y}_{SS} = \underline{Y}_{TT}$$

$$\underline{Y}_K = \underline{Y}_{RS} = \underline{Y}_{SR} = \underline{Y}_{RT} = \underline{Y}_{TR} = \underline{Y}_{ST} = \underline{Y}_{TS}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{E}_R \\ \underline{E}_S \\ \underline{E}_T \end{pmatrix} - j\omega \underbrace{\begin{pmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{pmatrix}}_{\text{gekoppeltes System}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_R \\ \underline{I}_S \\ \underline{I}_T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_R \\ \underline{I}_S \\ \underline{I}_T \end{pmatrix} - \underline{Z}_N \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{gekoppeltes System}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_R \\ \underline{I}_S \\ \underline{I}_T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_R \\ \underline{I}_S \\ \underline{I}_T \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} (\underline{Y}_E + 2\underline{Y}_K) & -\underline{Y}_K & -\underline{Y}_K \\ -\underline{Y}_K & (\underline{Y}_E + 2\underline{Y}_K) & -\underline{Y}_K \\ -\underline{Y}_K & -\underline{Y}_K & (\underline{Y}_E + 2\underline{Y}_K) \end{pmatrix}}_{\text{gekoppeltes System}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix}$$

$$\underline{U}_{RST} = \underline{E}_{RST} - j\omega \cdot \underline{Z}_{RST} \cdot \underline{I}_{RST} - R \cdot \underline{I}_{RST} - \underline{Z}_N \cdot \underline{I}_{RST} \quad \text{und} \quad \underline{I}_{RST} = \underline{Y}_{RST} \cdot \underline{U}_{RST}$$

Diagonalisierung von Matrizen: aus der Mathematik ist bekannt

Sei $\mathbf{T}$ eine symmetrische $n \times n$ -Matrix, dann gibt es eine Matrix $\mathbf{C}$, so dass gilt:

$$\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{D}$$

Darin sind die λ_i die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{T}$, die gemäß $\det(\mathbf{T} - \lambda \cdot \mathbf{E}) = 0$ bestimmt werden können.

Bei einer symmetrischen Matrix $\mathbf{T}$ existieren n reelle Eigenwerte λ_i und n zugehörige linear unabhängige Eigenvektoren Ψ_i . Die zu den Eigenwerten λ_i gehörigen Eigenvektoren Ψ gehorchen der Gleichung

$$\mathbf{T} \cdot \Psi = \lambda_i \cdot \Psi \quad \text{oder} \quad (\mathbf{T} - \lambda_i \cdot \mathbf{E}) \cdot \Psi = \mathbf{0} \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, n$$

Die Matrix $\mathbf{C}$ besteht aus den Eigenvektoren Ψ als Spaltenvektoren.

Bei einer symmetrischen Matrix $\mathbf{T}$ sind die Eigenvektoren Ψ_i orthogonal, d. h. das Skalarprodukt von 2 Eigenvektoren von verschiedenen Eigenwerten verschwindet:

$$\langle \Psi_i \cdot \Psi_k \rangle = 0 \quad \text{für } i \neq k$$

Entkopplung des RST-Systems: Eigenwerte und Eigenvektoren (I)

Die Systemmatrizen $\underline{Z}_{RST}$, $\underline{Y}_{RST}$, $\underline{Z}_N$ und $\mathbf{R}$ sind symmetrisch für ein symmetrisches dreiphasiges Netzwerk.

Für die Systemmatrizen gilt allgemein

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenwerte:

$$\det(\mathbf{T} - \lambda \cdot \mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} A - \lambda & B & B \\ B & A - \lambda & B \\ B & B & A - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

führt auf die charakteristische Gleichung:

$$(A - \lambda) \left[(A - \lambda)^2 - B^2 \right] - B \left[B(A - \lambda) - B^2 \right] + B \left[B^2 - B(A - \lambda) \right] = 0$$

Eigenwerte als Lösungen der char. Gleichung:

$$\lambda_1 = A + 2B \quad \lambda_2 = A - B \quad \lambda_3 = A - B$$

Berechnung der Eigenvektoren:

$$\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Psi} = \lambda_i \cdot \boldsymbol{\Psi} \quad \text{oder} \quad (\mathbf{T} - \lambda_i \cdot \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0} \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{pmatrix} -2B & B & B \\ B & -2B & B \\ B & B & -2B \end{pmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 = \mathbf{0} \quad \begin{pmatrix} B & B & B \\ B & B & B \\ B & B & B \end{pmatrix} \boldsymbol{\Psi}_2 = \mathbf{0} \quad \begin{pmatrix} B & B & B \\ B & B & B \\ B & B & B \end{pmatrix} \boldsymbol{\Psi}_3 = \mathbf{0}$$

Entkopplung des RST-Systems: Eigenwerte und Eigenvektoren (II)

Eigenwerte:

Eigenwerte als Lösungen der char. Gleichung:

$$\lambda_1 = A + 2B \quad \lambda_2 = A - B \quad \lambda_3 = A - B$$

Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} -2B & B & B \\ B & -2B & B \\ B & B & -2B \end{pmatrix} \underline{\psi}_1 = \underline{0} \quad \begin{pmatrix} B & B & B \\ B & B & B \\ B & B & B \end{pmatrix} \underline{\psi}_2 = \underline{0} \quad \begin{pmatrix} B & B & B \\ B & B & B \\ B & B & B \end{pmatrix} \underline{\psi}_3 = \underline{0}$$

$$\underline{C} = (\underline{\psi}_1 \quad \underline{\psi}_2 \quad \underline{\psi}_3) = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} \end{pmatrix}$$

Transformation	Anwendungsgebiet
Symmetrische Komponenten (012-Komponenten)	Berechnung unsymmetrischer Fehler (1- und 2-polige Kurzschlüsse)
$\alpha\beta 0$ -Komponenten (Diagonal-Komponenten)	Analyse unsymmetrischer Dreiphasensysteme Basis für die dq0-Transformation
dq0-Komponenten (Park-Komponenten)	Analyse von Drehfeldmaschinen

$$\left. \begin{aligned} -2\psi_{11} + \psi_{21} + \psi_{31} &= 0 \\ \psi_{11} - 2\psi_{22} + \psi_{31} &= 0 \\ \psi_{11} + \psi_{22} - 2\psi_{31} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ für } \lambda_1$$

und

$$\psi_{12} + \psi_{22} + \psi_{32} = 0 \quad \text{für } \lambda_2$$

$$\psi_{13} + \psi_{23} + \psi_{33} = 0 \quad \text{für } \lambda_3$$

Auswirkung der Diagonalisierung: Entkopplung des Systems

Grundgleichungen des RST-Systems:

$$\underline{U}_{RST} = \underline{E}_{RST} - j\omega \cdot \underline{Z}_{RST} \cdot \underline{I}_{RST} - \underline{R} \cdot \underline{I}_{RST} - \underline{Z}_N \cdot \underline{I}_{RST} \quad \text{und} \quad \underline{I}_{RST} = \underline{Y}_{RST} \cdot \underline{U}_{RST}$$

Transformation in ein XYZ-System mit $\underline{U}_{RST} = \underline{C} \cdot \underline{U}_{XYZ}$ und $\underline{U}_{XYZ} = \underline{C}^{-1} \cdot \underline{U}_{RST}$ führt auf

$$\underline{C} \cdot \underline{U}_{XYZ} = \underline{C} \cdot \underline{E}_{RST} - j\omega \cdot \underline{Z}_{RST} \cdot \underline{C} \cdot \underline{I}_{XYZ} - \underline{R} \cdot \underline{C} \cdot \underline{I}_{XYZ} - \underline{Z}_N \cdot \underline{C} \cdot \underline{I}_{XYZ}$$

und $\underline{C} \cdot \underline{I}_{XYZ} = \underline{Y}_{RST} \cdot \underline{C} \cdot \underline{U}_{XYZ}$

Multiplikation mit $\underline{C}^{-1}$:

$$\underline{U}_{XYZ} = \underline{E}_{XYZ} - j\omega \underbrace{\left[\underline{C}^{-1} \cdot \underline{Z}_{RST} \cdot \underline{C} \right]}_{\underline{Z}_D} \cdot \underline{I}_{XYZ} - \underbrace{\left[\underline{C}^{-1} \cdot \underline{R} \cdot \underline{C} \right]}_{\underline{R}_D = \underline{R}} \cdot \underline{I}_{XYZ} - \underbrace{\left[\underline{C}^{-1} \cdot \underline{Z}_N \cdot \underline{C} \right]}_{\underline{Z}_{ND}} \cdot \underline{I}_{XYZ}$$

und

$$\underline{I}_{XYZ} = \underbrace{\left[\underline{C}^{-1} \cdot \underline{Y}_{RST} \cdot \underline{C} \right]}_{\underline{Y}_D} \cdot \underline{U}_{XYZ}$$

Diagonalmatrix

$$\underline{Z}_D = \underline{C}^{-1} \cdot \underline{Z}_{RST} \cdot \underline{C} = \begin{pmatrix} L+2M & 0 & 0 \\ 0 & L-M & 0 \\ 0 & 0 & L-M \end{pmatrix}$$

$$\underline{R} = \underline{R}_D = \underline{C}^{-1} \cdot \underline{R} \cdot \underline{C} = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}$$

$$\underline{Z}_{ND} = \underline{C}^{-1} \cdot \underline{Z}_N \cdot \underline{C} = \underline{Z}_N \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y}_D = \underline{C}^{-1} \cdot \underline{Y}_{RST} \cdot \underline{C} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_E & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_E + 3\underline{Y}_K & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_E + 3\underline{Y}_K \end{pmatrix}$$

Symmetrische Komponenten: Transformationsgleichungen

Grundgleichungen des RST-Systems:

$$\underline{\mathbf{C}} = (\underline{\psi}_1 \quad \underline{\psi}_2 \quad \underline{\psi}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Transformationsmatrizen:

$$\underline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{pmatrix}$$

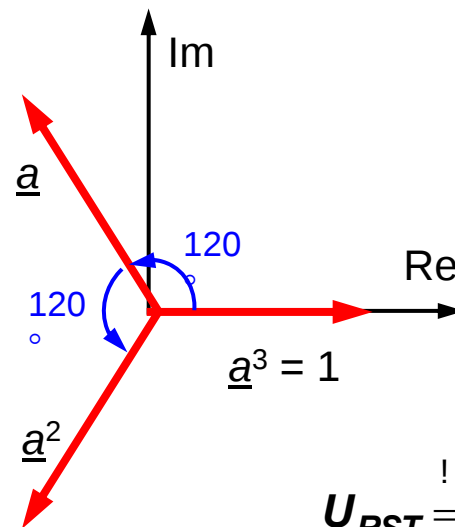
$$\underline{\mathbf{C}}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{pmatrix}$$

Physikalische Interpretation:

Aufteilung des unsymm.

Dreiphasensystems in

- Mitsystem
- Gegensystem
- Nullsystem



mit

$$\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \underline{a}^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{a}^3 = 1 \quad 1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$$

$$\underline{\mathbf{U}}_{RST} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{U}}_{012} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{U}}_{012} = \underline{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{U}}_{RST}$$

Symmetrische Komponenten: Eigenschaften (I)

Transformation einer symmetrischen Drehspannungsquelle:

$$\underline{E}_{012} = \underline{C}^{-1} \cdot \underline{E}_{RST} = \begin{pmatrix} \underline{E}_0 \\ \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{E}_R \\ \underline{E}_S \\ \underline{E}_T \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{E}_R \\ \underline{a}^2 \cdot \underline{E}_R \\ \underline{a} \cdot \underline{E}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{E}_R \\ 0 \end{pmatrix}$$

In symmetrischen Komponenten hat nur das Mitsystem (Index 1) eine anregende Quelle!

In symmetrischen Komponenten reduziert sich die Berechnung eines vollständig symmetrischen Drehstromsystems auf die Berechnung einer 1-phasigen Wechselstromschaltung

$$\underline{U}_{012} = \underline{E}_{012} - j\omega \underbrace{\left[\underline{C}^{-1} \cdot \underline{Z}_{RST} \cdot \underline{C} \right]}_{\underline{Z}_D} \cdot \underline{I}_{012} - \underbrace{\left[\underline{C}^{-1} \cdot \underline{R} \cdot \underline{C} \right]}_{\underline{R}_D = \underline{R}} \cdot \underline{I}_{012} - \underbrace{\left[\underline{C}^{-1} \cdot \underline{Z}_N \cdot \underline{C} \right]}_{\underline{Z}_{ND}} \cdot \underline{I}_{012} \quad \text{und} \quad \underline{I}_{012} = \underbrace{\left[\underline{C}^{-1} \cdot \underline{Y}_{RST} \cdot \underline{C} \right]}_{\underline{Y}_D} \cdot \underline{U}_{012}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{E}_R \\ 0 \end{pmatrix} - j\omega \begin{pmatrix} L+2M & 0 & 0 \\ 0 & L-M & 0 \\ 0 & 0 & L-M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} - \underline{Z}_N \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_E & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_E + 3\underline{Y}_K & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_E + 3\underline{Y}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$$

Symmetrische Komponenten: Eigenschaften (II)

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{E}_R \\ 0 \end{pmatrix} - j\omega \begin{pmatrix} L+2M & 0 & 0 \\ 0 & L-M & 0 \\ 0 & 0 & L-M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} - \underline{Z}_N \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

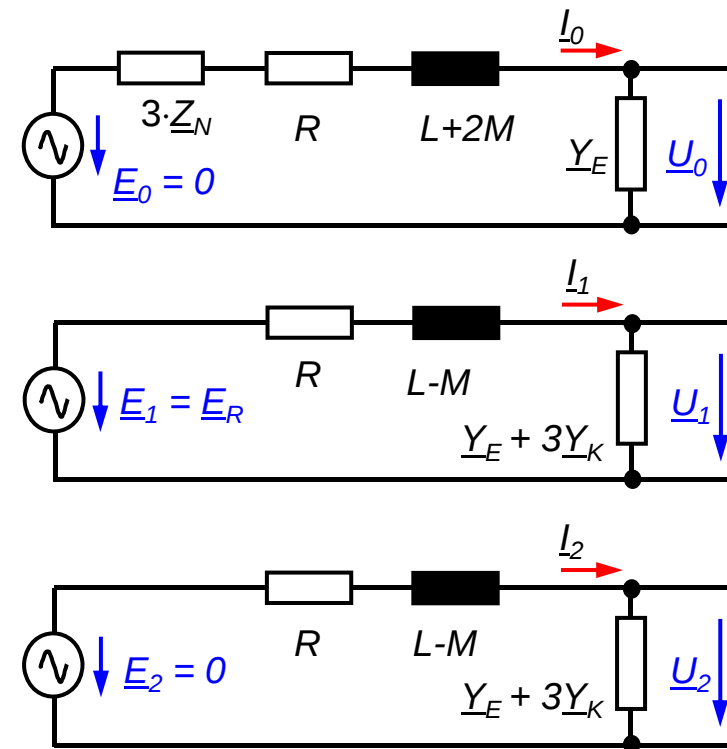
$$\begin{pmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_E & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_E + 3\underline{Y}_K & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_E + 3\underline{Y}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$$

In symmetrischen Komponenten reduziert sich die Berechnung eines vollständig symmetrischen Drehstromsystems auf die Berechnung einer 1-phasigen Wechselstromschaltung

**Basis dieser Transformation:
Diagonalisierung der Systemmatrizen**

Wichtige Eigenschaft der symmetrischen Komponenten

- Die Transformation ist physikalisch interpretierbar als 2 gegeneinander laufende symmetrische Drehspannungssysteme und ein sog. Nullsystem
- Für passive Systeme ohne rotierende Magnetfelder ist die Ersatzschaltung im Mit- und Gegensystem identisch
- Unsymmetrische Quellen: Netzwerk durch 3 1-phasige Schaltungen berechenbar



$\alpha\beta 0$ -Komponenten:

Transformationsgleichungen und Eigenschaften

$$\underline{U}_{RST} \stackrel{!}{=} \underline{C} \cdot \underline{U}_{\alpha\beta 0} \quad \text{und} \quad \underline{U}_{\alpha\beta 0} \stackrel{!}{=} \underline{C}^{-1} \cdot \underline{U}_{RST}$$

Wichtigster Unterschied zu symm. Komponenten:

$\underline{C}$ und $\underline{C}^{-1}$ besitzen **nur reelle Koeffizienten**

war bis vor ca. 20 Jahren von Bedeutung,
als Netznachbildungen in Hardware aufgebaut wurden

$\alpha\beta 0$ -Komponenten sind die theoretische Basis
der dq0-Komponenten

$$\underline{C} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & \sqrt{3} & 2 \\ -1 & -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformation einer symmetrischen Drehspannungsquelle:

$$\underline{E}_{\alpha\beta 0} = \underline{C}^{-1} \cdot \underline{E}_{RST} = \begin{pmatrix} \underline{E}_{\alpha} \\ \underline{E}_{\beta} \\ \underline{E}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E}_R \\ \underline{a}^2 \cdot \underline{E}_R \\ \underline{a} \cdot \underline{E}_R \end{pmatrix} = \underline{E}_R \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{pmatrix}$$

In $\alpha\beta 0$ -Komponenten hat das α - und das β -System eine anregende Spannung

⇒ höherer Rechenaufwand als bei den symm. Komponenten, da bei $\alpha\beta 0$ -Komponenten
2 Schaltungen berechnet werden müssen

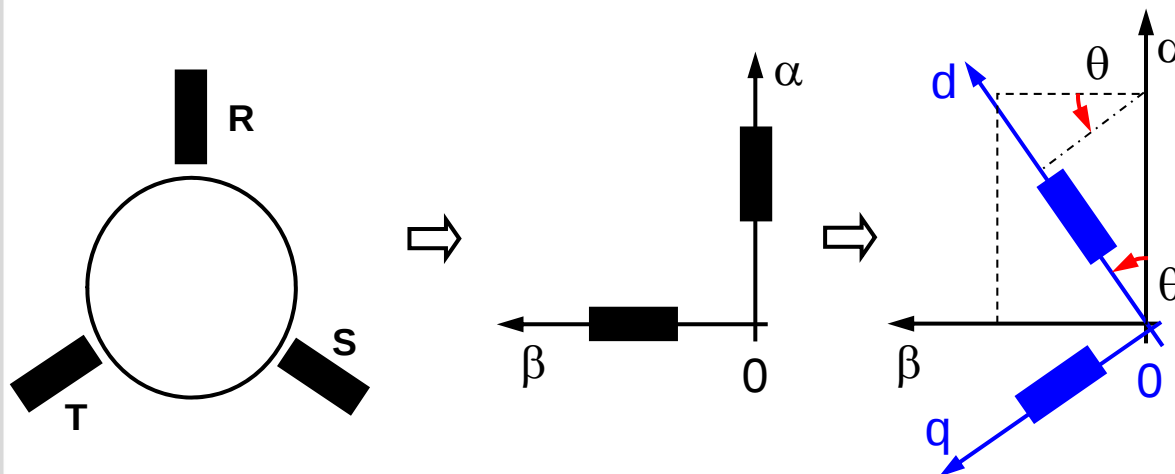
dq0-Komponenten oder Park-Transformation: Prinzip

Grundgedanke der Park-Transformation:

Überführung des ruhenden RST-Systems einer Drehfeldmaschine in das rotierende Systems des Läufers

Dazu 2 Schritte:

1. Transformation des RST-Systems in das ruhende und orthogonale $\alpha\beta 0$ -System
2. Transformation des $\alpha\beta 0$ -Systems in das ebenfalls orthogonale, aber rotierende dq0-System



$$\underline{U}_{\alpha\beta 0} = \underline{G} \cdot \underline{U}_{dq0}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{U}_{\alpha} \\ \underline{U}_{\beta} \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_d \\ \underline{U}_q \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{U}_{dq0} = \underline{G}^{-1} \cdot \underline{U}_{\alpha\beta 0}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{U}_d \\ \underline{U}_q \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_{\alpha} \\ \underline{U}_{\beta} \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix}$$

dq0-Komponenten: Transformationsgleichungen

$$\underline{U}_{\alpha\beta 0} = \underline{G} \cdot \underline{U}_{dq0} = \begin{pmatrix} \underline{U}_\alpha \\ \underline{U}_\beta \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_d \\ \underline{U}_q \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} \quad \underline{U}_{dq0} = \underline{G}^{-1} \cdot \underline{U}_{\alpha\beta 0} = \begin{pmatrix} \underline{U}_d \\ \underline{U}_q \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_\alpha \\ \underline{U}_\beta \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der dq0-Komponenten
aus den Komponenten des
RST-Systems

$$\underline{U}_{dq0} = \underline{C}^{-1} \cdot \underline{U}_{RST} = \begin{pmatrix} \underline{U}_d \\ \underline{U}_q \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta & -\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta \\ -2\sin\theta & \sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta & -\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix}$$

führt auf:

$$\underline{U}_{RST} = \underline{C} \cdot \underline{U}_{dq0}$$

und

$$\underline{U}_{dq0} = \underline{C}^{-1} \cdot \underline{U}_{RST}$$

mit

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 1 \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{C}^{-1} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$